数理解析研究所講究録
928 巻 1995 年 1-7

非線形作用素方程式の Krawczyk 作用素と区間関数の積分理論による解の存在の数値的検証法

大石進一 (Shin'ichi OISHI)
早稲田大学理工学部情報学科

1 はじめに

非線形常微分方程式の境界値問題の解の数値的存在検証法として 1965 年に発表された占部実の方法 [1] は極めて優れたもので，現在の精度保証付き数値計算の研究の先駆的研究としての役割を果たしている．これは簡易 Newton 法の収束定理に基づくもので検証例も多く示されてきた [2]-[6]．連立微分方程式の場合，その各成分は異なる物理量に対応するので，成分毎に基礎となる単位量が異なる．山本哲朗 [7] は占部の方法を成分毎評価法として拡張した．

著者 [8] は作用素ノルム評価による過大評価を避け，Newton 作用素を近似解の近傍に作用させたときの像を数値計算によりほぼ自動的に評価する方法として区間関数の理論を用いた占部の方法の拡張法を示した．これは山本の方法の拡張とも解釈できる．

本稿ではこれをより一般の非線形作用素方程式に拡張することを考える．

Ωを R^nの適当な条件を満たす空でない有界領域，$C(\Omega)$ をΩ上の n 次元ベクトル値連続関数の作る Banach 空間とする．$u=(u_1,u_2,\cdots,u_n)\in C(\Omega)$ に対して，そのノルムを

$$\|u\|_s=\max_{1\le i\le n}\left\|\frac{u_i}{s_i}\right\|_\infty \tag{1}$$

と定義する．ただし，$s=(s_1,s_2,\cdots,s_n)$ は n 次元スケーリングベクトルで，$s_i>0$ が $1\le i\le n$ について成立するものとする．また，

$$\|u_i\|_\infty=\max_{x\in\Omega}|u_i(x)| \tag{2}$$

である．ここで，非線形作用素方程式

$$F(u)=Lu+Nu=0 \tag{3}$$

を考える．ただし，作用素 Fの定義域 $D(F)$ は $C(\Omega)$ の部分集合とし，$F:D(F)\subset C(\Omega)\to C(\Omega)$ とする．また，Fは $D(F)$ から $C(\Omega)$ への作用素として 1 回 Fréchet 微分可能で，$L:C(\Omega)\to C(\Omega)$ は線形作用素で $N:C(\Omega)\to C(\Omega)$ は 1 回 Fréchet 微分可能な非線形 Nemitski 型作用素とする：

$$Nu=f(u,x). \tag{4}$$

ただし，fは $R^n\times R^n$から R^nへの 1 回連続微分可能な関数とする．以下では，数値実験などにより非線形作用素方程式 (3) の近似解$\tilde{u}$が与えられているとき，rを適当な小さな正の実数として，球

$$B(\tilde{u},r)=\{u|\ \|u-\tilde{u}\|_s\le r\} \tag{5}$$

の中に式 (3) の解が存在するか否かを精度保証付き数値計算によって検証する方法を示す．

2 簡易 Newton 作用素

作用素 Fの$\tilde{u}$における Fréchet 微分は

$$DF(\tilde{u})v = Lv + DN(\tilde{u})v \tag{6}$$

で与えられる．ただし，$DN : C(\Omega) \to C(\Omega)$ は非線形作用素 Nの Fréchet 微分である．今，$DF(\tilde{u})$ の近似的逆作用素を $H : C(\Omega) \to D(F)$ とする．以下，簡単のため，Hが$\phi \in C(\Omega)$ に対して

$$\begin{aligned} v &= H\phi \\ &= \int_\Omega H(x,y)\phi(y)dy \end{aligned} \tag{7}$$

と $n \times n$ 行列の積分核 $H(x,y)$ をもつ積分作用素で与えられるとしよう．Hが，より複雑な形で与えられる場合も，積分作用素として与えられれば，以下の議論は同様になる．作用素 Hの逆作用素 Rが

$$Rv = Lv + Av \tag{8}$$

と与えられるとしよう．積分核 $H(x,y)$ が具体的に与えられているので Rの形が計算できると期待する訳である．以下では，このような例として，作用素 A が，各成分がΩ上の連続関数となる $n \times n$ 行列 a を用いて，

$$Av(x) = a(x)v(x) \tag{9}$$

と与えられるものとしよう．任意の$\phi \in C(\Omega)$ に対して，方程式 $Rv = \phi$の唯一解が $v = H\phi$ で与えられる．

ここで，簡易 Newton 作用素を

$$k(u) = H(A - N)u \tag{10}$$

で定義する．形式的な変形

$$\begin{aligned} & u - HF(u) \\ = \ & H(R - F)u \\ = \ & H(L + A - L - N)u \\ = \ & H(A - N)u \end{aligned} \tag{11}$$

より式 (10) で定義される作用素 kが簡易 Newton 作用素であることがわかる．作用素 A と Nが ともに $C(\Omega)$ からその中への作用素であるから kの定義域は $C(\Omega)$ で値域も $C(\Omega)$ となることに注意する．

以下，$C(\Omega)$ 内で作用素 kの不動点を求めることを考える：

$$k(u) = u. \tag{12}$$

式 (12) の解を非線形作用素方程式 (3) の弱解と呼ぶ．以下，式 (3) の正則性により，弱解が $D(F)$ に入り，古典解となるものとしよう．

3 Krawczyk 作用素

$C(\Omega)$ 内で作用素 kの不動点を求めるために無限次元 Krawczyk 作用素を導入する．そのために，簡単に区間関数の理論を概観する．通常，区間解析では区間は実閉区間を指す：

$$X = [a, b] = \{x | a \leq x \leq b\}. \tag{13}$$

二つの区間 $I = [a, b], J = [c, d]$ に対してその四則演算を

$$I * J = \{x | x = y * z, y \in I, z \in J\}, * \in \{+, -, \times, /\}$$

によって定義する．このとき $I * J$は区間の両端の実数の四則演算で計算できる：

$$\begin{aligned} I + J &= [a + c, b + d], \\ I - J &= [a - d, b - c], \\ I \times J &= [\min(a \times c, a \times d, b \times c, b \times d), \max(a \times c, a \times d, b \times c, b \times d)], \\ I / J &= [\min(a/c, a/d, b/c, b/d), \max(a/c, a/d, b/c, b/d)] \end{aligned} \tag{14}$$

領域Ω上の区間関数 $U(x)$ は形式的には

$$U(x) = [\underline{u}(x), \overline{u}(x)]. \tag{15}$$

と定義される. 関数$\underline{u}(x)$ と$\overline{u}(x)$ は端点関数と呼ばれる．本稿では端点関数は $C(\Omega)$ の要素とする．また，区間関数 $U(x)$ を $u \in C(\Omega)$ で$\underline{u}(x) \leq u(x) \leq \overline{u}(x)$, $(x \in \Omega)$ を満たすものの全体と考える．したがって，時に区間関数 $U(x)$ と $C(\Omega)$ 内の集合 $\{u(x) \in C(\Omega) |\ \underline{u}(x) \leq u(x) \leq \overline{u}(x)\}$ を同一視する．

区間関数と区間関数の加減乗除は各点 x ごとの加減乗除として定義する．区間関数の積分の理論は Caprani, Madsen, Rall[9] によって展開されている．彼らは$\omega \subset \Omega$に対して

$$\int_\omega U(y)dy = \left[\underline{\int_\omega} \underline{u}(y)dy, \overline{\int_\omega} \overline{u}(y)dy \right]. \tag{16}$$

という定義を与えている．ただし，$\underline{\int}$は lower Darboux 積分で$\overline{\int}$は upper Darboux 積分である. 以下，区間関数の積分は彼らの定義を採用することにする．

ベクトル値区間関数，行列値区間関数はその成分が区間関数となるものとして定義される．$U(x)$ がベクトル値または行列値区間関数とするとき $|U(x)|$ は要素として $|U_i(x)|$ または $|U_{ij}(x)|$ をもつベクトル値または行列値区間関数とする．ただし，a と b を実数として，区間 $[a, b]$ に対して，$|[a, b]|$ は次のように定義される：

$$|[a, b]| = \max(|a|, |b|). \tag{17}$$

また，Mid 関数は次のように定義される：

$$\mathrm{Mid}(U(x)) = \frac{\overline{u}(x) + \underline{u}(x)}{2}. \tag{18}$$

ここで $T(x)$ を Mid $(T(x)) = \tilde{u}(x)$ となる区間関数とする．次の，Krawczyk 作用素を定義する:

$$K(T) = k(\tilde{u}) + M(T - \tilde{u}), \tag{19}$$

ただし，

$$M = H(A - DN(T)) \text{ で } \tilde{u} = \mathrm{Mid}(T). \tag{20}$$

とする．このとき，次の定理が成立する：

定理 1 $T(x)$ を区間関数で Mid $(T(x)) = \tilde{u}(x)$ を満たし，

$$\underline{t}(x) \neq \overline{t}(x) \tag{21}$$

がすべての $x \in \Omega$で満足されているものとする．もし，

$$K(T(x)) \subset T(x) \tag{22}$$

及び

$$\|M\|_s < 1, \tag{23}$$

が成立すると kの不動点 u^*が唯一つ $T(x) \subset C(\Omega)$ に存在する．**(定理終)**

(証明) $T(x)$ を区間関数で次を満たすと仮定しよう：

$$K(T(x)) \subset T(x) \tag{24}$$

及び

$$\|M\|_u < 1. \tag{25}$$

このとき，$k : C(\Omega) \to C(\Omega)$ が T上で縮小的で, $k(T) \subset T$を満たすことを証明しよう．

まず, $K(T) \subset T$であることを示す．最初に $M(T - \tilde{u})$ が $C(\Omega)$ において凸で閉であることに注意する．更に，$k : C(\Omega) \to C(\Omega)$ の Fréchet 微分 $Dk(u) : C(\Omega) \to C(\Omega)$ が次のように与えられる：

$$Dk(u) = H(A - DN(u)). \tag{26}$$

したがって $x \in T$に対して

$$\begin{aligned} k(u) &= k(\tilde{u}) + \int_0^1 Dk(tu + (1-t)\tilde{u})(u - \tilde{u})dt \\ &\subset k(\tilde{u}) + M(T - \tilde{u}) \subset K. \end{aligned} \tag{27}$$

となる．ただし，次の性質を用いた：

$$\begin{aligned} & \int_0^1 Dk(tu + (1-t)\tilde{u})(u - \tilde{u})dt \\ \subset\ & \overline{co}\{Dk(tu + (1-t)\tilde{u})(u - \tilde{u}) | 0 \le t \le 1\}. \end{aligned} \tag{28}$$

但し，$\overline{co}$は閉凸包を取る演算とする．これは $K(T) \subset T$を示している．

また，明らかに, $u \in T$であれば,

$$Dk(u) \in M. \tag{29}$$

したがって条件 (25) より, 次を得る：

$$\|Dk(u)\|_s < 1(\text{すべての } u \in T. \tag{30}$$

こうして $k : C(\Omega) \to C(\Omega)$ が T上で Banach の縮小原理の条件を満たすことが分かった．したがって，縮小写像原理より作用素 kの不動点 u^*が $T(x) \subset C(\Omega)$ に唯一つ存在することがわかった．**(証明終)**

条件 (23) は $K(T(t))$ が $T(t)$ の真部分集合であれば自動的に満たされる．また，

$$T(x) = [\underline{t}(x), \overline{t}(x)] \tag{31}$$

とすると

$$U(x) = T(x) - \tilde{u}(x) = [\underline{t}(x) - \tilde{u}(x), \overline{t}(x) - \tilde{u}(x)] = [\underline{u}(x), \overline{u}(x)] \tag{32}$$

は原点を含む集合となる．このとき，$\overline{u}(x) = -\underline{u}(x)$ となる．また，任意の $x \in \Omega$に対して$\overline{u}(x) > 0$ を満たしているものとする．このとき，

$$K(T) - \tilde{u} = -HF(\tilde{u}) + H[(f_u(T,x) - a)U] \tag{33}$$

に注意して，条件 (23) は次の形で検証することとする：

$$-HF(\tilde{u}) + H[(f_u(T,x) - a)U] \subset U. \tag{34}$$

ここで，次の性質に注意する：

[性質] A を $m \times n$ 区間行列，Bを $n \times p$ 区間行列とする．Mid $B = 0$ であれば，次が成り立つ：

$$AB = |A|B = [-|A||B|, |A||B|] = [-1,1]|A||B|. \tag{35}$$

□

この性質より，

$$\begin{aligned} & -HF(\tilde{u}) + H[(f_u(T,x) - a)U] \\ = & -HF(\tilde{u}) + \int_\Omega H(x,y)(f_u(T(y),y) - a(y))U(y)dy \end{aligned} \tag{36}$$

となる．したがって，条件 (34) は各 $1 \le i \le n$ について

$$\begin{aligned} & -HF(\tilde{u})_i + \int_\Omega H(x,y)(f_u(T(y),y) - a(y))U(y)dy \\ = & -HF(\tilde{u})_i + \int_\Omega \sum_{j,k=1}^{n} H_{ij}(x,y)(f_u(T(y),y)_{jk} - a_{jk}(y))U_k(y)dy \\ = & -HF(\tilde{u})_i + [-1,1] \int_\Omega \sum_{j,k=1}^{n} |H_{ij}(x,y)[f_u(T(y),y)_{jk} - a_{jk}(y)]|\overline{u}_k(y)dy \\ \subset & [-1,1]\overline{u}_i(x) \end{aligned} \tag{37}$$

が成立することと一致する．ただし，$-HF(\tilde{u})_i$は$-HF(\tilde{u})$ の第 i 成分を表すものとする．以上をまとめて次の定理を得る：

定理 2 $\overline{u} \in C(\Omega)$ で任意の $x \in \Omega$に対して$\overline{u}(x) > 0$ を満たしているものとする．$U(x) = [-\overline{u}(x), \overline{u}(x)]$ とする．また，$\tilde{u} \in D(F)$ は $F(u) = 0$ の近似解で $T(x) = \tilde{u}(x) + U(x) \subset C(\Omega)$ とする．もし，各 $1 \le i \le n$ について

$$-HF(\tilde{u})_i + [-1,1] \int_\Omega \sum_{j,k=1}^{n} |H_{ij}(x,y)[f_u(T(y),y)_{jk} - a_{jk}(y)]|\overline{u}_k(y)dy \subset [-1,1]\overline{u}_i(x) \tag{38}$$

が成立すると kの不動点 u^*が唯一つ $T(x) \subset C(\Omega)$ 内に存在する．**(定理終)**

では，近似解$\tilde{u}(x)$ が与えられたとき，どのように $T(x)$ を選べばよいのであろうか．この問題も含め，経験的に次のような検証法がよいと考えている：

[非線形作用素方程式の解の存在の数値的検証アルゴリズム]
(Step 1) $-HF(\tilde{u})$ の区間包囲 $S(x)$ を計算する．
(Step 2) ρを 1 より大きな定数とする．経験的には$\rho = 2$ を推奨する．

$$s = \max_{-1 \le t \le 1} |S(x)|. \tag{39}$$

とスケーリングベクトルを選ぶ．そして，

$$T(x) - \tilde{u}(x) = \rho[-s, s] \tag{40}$$

と取る．
(Step 3) 各 $1 \le i \le n$ について

$$S(x)_i + [-1, 1] \int_\Omega \sum_{j,k=1}^{n} |H_{ij}(x, y)[f_u(T(y), y)_{jk} - a_{jk}(y)]| \overline{u}_j(y) dy \subset [-1, 1] \overline{u}_i(x) \tag{41}$$

が成立するか否かを検証する．もし，これらの条件が成立していることが確認されれば，方程式(10) の孤立解が $T(x)$ に唯一つ存在することがわかる．もし，検証条件が満たされないときには，近似解の精度や包み込み $S(x)$ の計算の精度を上げて，検証を繰り返す．

作用素方程式の真の解が正則な解なら，このようにしていずれはその存在が検証できることが示される．

3.1 検証例

本節では，検証の例として次の非線形方程式

$$\frac{d^2u}{dx^2} - \frac{1}{4}(1 - u^2)\frac{du}{dx} + \frac{1}{16}u = 0 \tag{42}$$

を考える．境界条件として

$$u(-1) = 0, \; u(1) = 2 \tag{43}$$

を付ける．この例は占部 [10] による．この方程式を連立系に書き直して数値的検証を行った．すなわち近似解を多項式補間し，区間 $[-1, 1]$ を 10 等分して，前節の方法により Kの区間包囲を求めた．この際，Sを $[-1, 1]$ の部分区間とするとき $f_u(T, x)$ 等の区間包囲の計算には 3 次のテイラー展開を利用した．これらの条件の下で前節のアルゴリズムを適用した結果，

$$T(x) = \tilde{u}(x) + \{x \in X | \; |u_1(x)| \le 0.0447, |u_2(x)| \le 0.0167\} \tag{44}$$

となった．図 1 に示すように $K(T) - \tilde{u}$が $T - \tilde{u}$の真部分集合となることが確認されたので，$K(T)$に真の解が存在し，T内で唯一であることが示された．

参考文献

[1] M.Urabe: "Galerkin's Procedure for Nonlinear Periodic Systems", Arch. Rational Mech. Anal., **20**, (1965) pp.120-152.

[2] M.Urabe: "An Existence Theorem for Multi-Point Boundary Value Problems", Funkcialaj Ekvacioj, **9** (1966), pp.43-60.

[3] 篠原能材: "数値解析の基礎", 日新出版 (1978).

[4] M.Fujii: "An aposteriori error estimation of the numerical solution by step-by step methods for system of ordinary differential equations", Bull. Fukuoka Univ. Ed., **23** (1973), pp.35-44.

[5] H.Shintani and Y.Hayashi: "A posteriori error estimates and iterative methods in the numerical solution of systems of ordinary differential equaitons", Hiroshima Math. J., **8** (1978), pp.101-121.

[6] Y.Hayashi: "On a posteriori error estimation in the numerical solution of system of ordinary differential equaitons", Hiroshima Math. J., **9** (1979), pp.201-243.

[7] T.Yamamoto: "An Existence Theorem of Soution to Boundary Value Problems And Its Application To Error Estimates", Math. Japonica, **27** (1982), pp.301-318.

[8] S.Oishi: "Numerical Verification of Existemce and Inclusion of Solutions for Nonlinear Operator Equations", J. Computational and Applied Math., to appear (1995).

[9] O.Caprani, K.Madsen and L.B.Rall: "Integration of Interval Functions", SIAM J. Math. Anal., **12** (1981), pp.321-341.

[10] M.Urabe: "Numerical Solution of Multi-Point Boundary Value Problems in Chebyshev Series Theory of the Method", Numerische Mathematik, **9** (1967), pp.341-366.